Thema: geradengleichung in ebene und raum
Lösungen

AB 3/Geometrie

(Hinweis: Für alle Aufgaben ist die Nutzung von HM (GTR/TW) erlaubt.)

Geraden in parameterfreier Form (Koordinatenform)

1 Gegeben:

a) Achsenabschnittsgleichung $\frac{y}{8}+\frac{3\cdot x}{4}=1$

b) Punktrichtungsgleichung $y-4=2{,}5\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)$

c) Allgemeine Form $2\cdot x+6\cdot y-2=0$

Gesucht:

a) Normalform $y=-6x+8$
Allgemeine Form $y+6x-8=0$

b) Normalform $y=2{,}5x+\frac{17}{3}$
Allgemeine Form $y-2{,}5x-\frac{17}{3}=0$

c) Normalform $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$
Achsenabschnittsgleichung $3y+x=1$

2 Bestimmen Sie jeweils den Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2.

a) $g_1:\; y=-2\cdot x+16$
$g_2:\; y=-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{3}{5}$
$\alpha\approx 33^\circ$

b) $g_1:\; \frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$
$g_2:\; \frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$
$\alpha\approx 75{,}5^\circ$

3 Ermitteln Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden.

$g_1:\; y-2=5\cdot(x-13)$ $g_2:\; y=\frac{x}{5}+18$

$g_1=g_2 \Leftrightarrow \frac{24}{5}x=81$, d.h. $S\left(\frac{405}{24}\middle|\frac{171}{8}\right)$

4 Zu einer Geraden g mit der Gleichung $y=-\frac{2}{3}\cdot x+3$ soll eine zweite Gerade h senkrecht verlaufen und durch den Punkt $P(1|1)$ gehen. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h.

$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$ mit $P(1|1)$ gilt: $1=\frac{3}{2}\cdot 1+n \Leftrightarrow n=-\frac{1}{2}$

Eine Gleichung von h: $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

5 Ein Viereck ist gegeben durch die Eckpunkte $A(0|-1)$, $B(4|-1)$, $C(2|1)$ und $D(-2|1)$.
Bestimmen Sie alle Innenwinkel des Vierecks.

g_{AB} … $y=-1{,}5$ $\Rightarrow m_{AB}=0$
g_{BC} … $-2x-2y=-6$ $\Rightarrow m_{BC}=-1$
g_{CD} … $y=1$ $\Rightarrow m_{BC}=0$
g_{DA} … $2x+2y=-2$ $\Rightarrow m_{DA}=-1$

$\beta=45^\circ=\delta$
$\gamma=180^\circ-45^\circ=135^\circ=\alpha$

Geraden in Parameterform

1 Geben Sie zu den Geraden durch die Punkte A und B, A und C sowie B und C jeweils eine Parametergleichung an.

a) $A(0|5|-4)$, $B(6|3|1)$, $C(9|-9|0)$ b) $A(8|-1|1)$, $B(4|5|-2)$, $C(1|1|1)$

a) Gerade durch A und B: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\5\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}6\\-2\\5\end{pmatrix}$ Gerade durch A und C: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\5\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}9\\-14\\4\end{pmatrix}$

Gerade durch B und C: $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-12\\-1\end{pmatrix}$

b) Gerade durch A und B: $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-4\\6\\-3\end{pmatrix}$ Gerade durch A und C: $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\-2\\0\end{pmatrix}$

Gerade durch B und C: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\-3\end{pmatrix}$

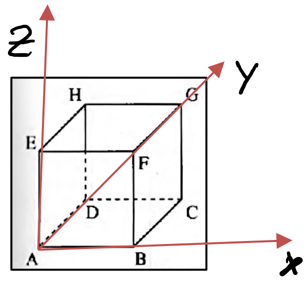
2 Geben Sie zwei verschiedene Parametergleichungen der Geraden g an, die durch die Punkte $A(7|-3|-5)$ und $B(2|0|3)$ geht.

$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\-3\\-5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-3\\-8\end{pmatrix}$; $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\3\\8\end{pmatrix}$

3 Welche besonderen Geraden werden durch die folgenden Parametergleichungen beschrieben?

$g_1 : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad g_2 : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad g_3 : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Eine der Winkelhalbierenden zwischen der x-Achse und der y-Achse
b) Eine der Winkelhalbierenden zwischen der y-Achse und der z-Achse
c) Gerade, deren orthogonale Projektionen auf die Ebenen der Koordinatenachsen jeweils eine der entsprechenden Winkelhalbierenden ergibt.



4 Zeichnen Sie einen Würfel und bezeichnen Sie die Ecken mit *ABCDEFGH* (siehe Abbildung).
Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden, die festgelegt ist durch die Punkte:

a) *A* und *C* b) *B* und *D* c) *E* und *G* d) *F* und *H* e) *A* und *G*.

A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; 1; 0), D(0; 1; 0), E(0; 0; 1), F(1; 0; 1), G(1; 1; 1), H(0; 1; 1)

a) $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ f) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5a) Prüfen Sie, ob der Punkt *P*(2|3|- 1) auf der Geraden *g* durch die Punkte *A* (7|0|4) und *B*(12|-3|9) liegt.
b) Prüfen Sie, ob die drei Punkte *A*(2|-1|- 1), *B*(1|0|1) und *C*(3|6|7) auf einer Geraden liegen oder ein Dreieck bilden.
c) Wie könnte man eine Strecke (einen Strahl) mithilfe einer Parametergleichung ausdrücken? Begründen Sie.

a) wahr $P \in g_{AB}$
b) Die Punkte *A,B* und *C* bilden ein Dreieck

c) z.B.: Durch Beschränkung des Parameters *t* in einem bestimmten Intervall wird nur ein Teil der Geraden beschrieben.

6 Die Gerade *g* verläuft durch die Punkte *A*(1|-5|4) und *B*(5|1|4), die Gerade *h* hat die Gleichung $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass sich die Geraden *g* und *h* in genau einem Punkt schneiden.
Geben Sie den Schnittpunkt an.
Beschreiben Sie die besondere Lage der Geraden *g* im Koordinatensystem.

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g = h$ liefert *S*(3|-2|4).
Die Gerade *g* verläuft parallel zur *x*-*y*-Ebene.