SOL- Selbst organisiertes Lernen	Thema: Tangenten - und Normalenprobleme Musteraufgaben	Problem 1

Aufstellen der Tangentengleichung in einem Punkt des Graphen der Funktion

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x$

Berechne die Gleichungen der Tangenten an den Stellen

$x_1 = -2$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$

1. Ableitung: $f'(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

a) Zu $x_1 = -2$ gehört $y_1 = f(-2) = \frac{1}{4} \cdot 16 + (-8) + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$.

Der Berührpunkt ist somit: $B_1(-2 \mid 0)$.

Tangentensteigung in B_1: $m_T = f'(-2) = -8 + 12 - 2 = 2$

B_1 und m_T werden jetzt in die Punkt-Steigungs-Form eingesetzt:

Tangentengleichung: $y - 0 = 2(x + 2)$

T_1: $\mathbf{y = 2x + 4}$

b) Zu $x_2 = 1$ gehört $y_2 = f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1 + 1 - 2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$.

Der Berührpunkt ist somit: $B_2(1 \mid -\frac{3}{4})$.

Tangentensteigung in B_2: $m_T = f'(1) = 1 + 3 - 2 = 2$

B_2 und m_T werden jetzt in die Punkt-Steigungs-Form eingesetzt:

Tangentengleichung: $y + \frac{3}{4} = 2(x - 1)$

$y + \frac{3}{4} = 2x - 2$

$y = 2x - 2 - \frac{3}{4}$

T_2: $\mathbf{y = 2x - \frac{11}{4}}$

c) Zu $x_3 = -1$ gehört $y_3 = f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1 - 1 + 2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

Der Berührpunkt ist somit: $B_3(-1 \mid \frac{5}{4})$.

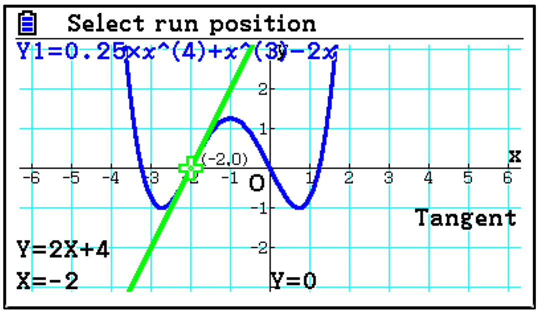
Tangentensteigung in B_3: $m_T = f'(-1) = 1 - 3 + 2 = 0$

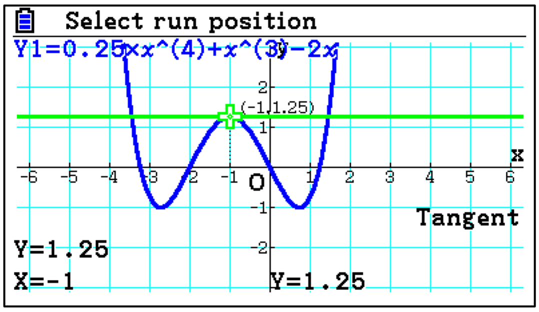
Steigung 0 bedeutet horizontale Gerade.

Diese hat die Gleichungsform: $y = n$

B_3 eingesetzt: T_3: $\mathbf{y = \frac{5}{4}}$

Lösungsbeispiel mit GTR





SOL- Selbst organisiertes Lernen	Thema: Tangenten - und Normalenprobleme Musteraufgaben	Problem 1

Aufstellen der Normalengleichung in einem Punkt des Graphen der Funktion

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3-2x$

Berechne die Gleichungen der Normalen an den Stellen

$x_1 = -2$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$

1. Ableitung: $f'(x)=x^3+3x^2-2$

a) Zu $x_1 = -2$ gehört $y_1 = f(-2) = \frac{1}{4}\cdot 16 + (-8) + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$.

Der Kurvenpunkt ist somit: $B_1(-2\,|\,0)$.

Tangentensteigung in B_1: $m_T = f'(-2) = -8 + 12 - 2 = 2$

Normalensteigung in B_1: $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{2}$

B_1 und m_N werden jetzt in die Punkt-Steigungs-Form eingesetzt:

Normalengleichung: $y - 0 = -\frac{1}{2}(x+2)$

N_1: $\mathbf{y = -\frac{1}{2}x - 1}$

b) Zu $x_2 = 1$ gehört $y_2 = f(1) = \frac{1}{4}\cdot 1 + 1 - 2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$.

Der Kurvenpunkt ist somit: $B_2(1\,|\,-\frac{3}{4})$.

Tangentensteigung in B_2: $m_T = f'(1) = 1 + 3 - 2 = 2$

Normalensteigung in B_2: $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{2}$

B_2 und m_N werden jetzt in die Punkt-Steigungs-Form eingesetzt:

Normalengleichung: $y + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}(x-1)$

$y + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x + 1$

N_2: $\mathbf{y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}$

c) Zu $x_3 = -1$ gehört $y_3 = f(1) = \frac{1}{4}\cdot 1 - 1 + 2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

Der Kurvenpunkt ist somit: $B_3(-1\,|\,\frac{5}{4})$.

Tangentensteigung in B_3: $m_T = f'(-1) = 1 - 3 + 2 = 0$

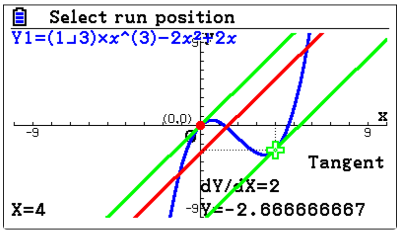
Normalensteigung in B_3: *Zu 0 gibt es keinen Kehrwert!*

Die Tangente ist parallel zur x-Achse, also ist die Normale parallel zur y-Achse:

Diese hat die Gleichungsform: $x = c$

B_3 eingesetzt: N_3: $\mathbf{x = -1}$

SOL- Selbst organisiertes Lernen	Thema: Tangenten - und Normalenprobleme Musteraufgaben	Problem 3



Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x$ und eine Gerade g mit g: $y = 2x - 3$.
Ermitteln Sie mögliche Gleichungen von Tangenten an den Graphen der Funktion, die parallel zur Geraden g verlaufen.

Ableitung: $f'(x) = x^2 - 4x + 2$

Bedingung: $\boxed{f'(x) = 2}$

$x^2 - 4x + 2 = 2 \quad | -2$

$x^2 - 4x = 0$

x ausklammern: $x \cdot (x - 4) = 0$

<u>1. Faktor:</u> $x_1 = 0$

y-Koordinate: $y_1 = f(0) = 0$

1. Punkt: $B_1(0\,|\,0)$

<u>2. Faktor:</u> $x - 4 = 0$

$x_2 = 4$

y-Koordinate: $y_2 = f(4) = \frac{1}{3} \cdot 64 - 2 \cdot 16 - 2 \cdot 4 = \frac{64}{3} - 32 + 8 = -\frac{8}{3}$

2. Punkt: $B_2\left(4\,|\,-\frac{8}{3}\right)$

Tangente in $B_1(0\,|\,0)$: $y = 2x$ (Ursprungsgerade!)

Tangente in $B_2\left(4\,|\,-\frac{8}{3}\right)$: $y + \frac{8}{3} = 2 \cdot (x - 4)$

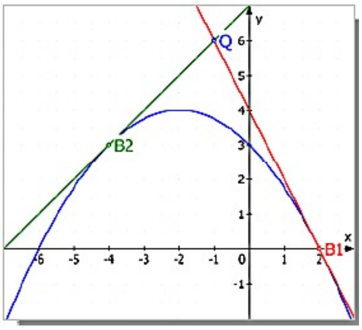
$y = 2x - 8 - \frac{8}{3}$

$y = 2x - \frac{32}{3}$

SOL- Selbst organisiertes Lernen	Thema: Tangenten - und Normalenprobleme Musteraufgaben	Problem 6

Gegeben ist f durch $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$ sowie der Punkt $Q(-1|\,6)$.

Bestimme Sie die Gleichungen der Tangenten, die durch Q an den Graphen von f gelegt werden können.



Allgemeine Tangentengleichung für $P(u\,|\,f(u))$: $\boxed{y - f(u) = f'(u)\cdot(x-u)}$

Berührpunkt sei $P\left(u\,|\,-\tfrac{1}{4}u^2 - u + 3\right)$, und die Tangentensteigung ist $f'(u) = -\tfrac{1}{2}u - 1$

(Man könnte auch x_1 statt u verwenden, doch u ist schneller geschrieben!)

Eingesetzt: $y - \left(-\tfrac{1}{4}u^2 - u + 3\right) = \left(-\tfrac{1}{2}u - 1\right)\cdot(x-u)$

Bedingung: $Q(-1\,|\,6) \in T$

Q eingesetzt: $\boxed{6} - \left(-\tfrac{1}{4}u^2 - u + 3\right) = \left(-\tfrac{1}{2}u - 1\right)\left(\boxed{-1} - u\right)$

Gleichung nach u umstellen: $6 + \tfrac{1}{4}u^2 + u - 3 = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}u^2 + 1 + u$

HINWEIS
Nutze ab hier den GTR zur Lösung!
(„SOLVE“ oder „GRAPH-Menü“)

Alles nach rechts: $0 = \tfrac{1}{4}u^2 + \tfrac{1}{2}u - 2 \quad |\cdot 2$ (ist besser als $\cdot 4$)

$\tfrac{1}{2}u^2 + u - 4 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 4}}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{2}} = -1 \pm 3 = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

y-Koordinaten: $f(2) = -\tfrac{1}{4}\cdot 4 - 2 + 3 = 0 \;\Rightarrow\; B_1(2\,|\,0)$

$f(-4) = \tfrac{1}{4}\cdot 16 - 4 + 3 = 4 \;\Rightarrow\; B_2(-4\,|\,3)$

Tangentensteigungen: $f'(2) = -\tfrac{1}{2}\cdot 2 - 1 = -1 - 1 = -2$

$f'(-4) = -\tfrac{1}{2}\cdot(-4) - 1 = 2 - 1 = 1$

Tangentengleichungen: $y - 0 = -2(x-2) \;\Leftrightarrow\; y = -2x + 4 \quad (T_1)$

$y - 3 = 1\cdot(x+4) \;\Leftrightarrow\; y = x + 7 \quad (T_2)$

Lösungsbeispiel mit GTR – Nutzung Programm „Tangente“