

3 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

3.1 Linearkombination

3.1.1 Wiederholung der Definition

Ein Vektor \vec{v} der Form $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ heißt Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

3.1.2 Aufgaben

1. Untersuchen Sie, ob sich $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -74 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 34 \\ -11 \end{pmatrix}$ darstellen lässt.

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -74 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 34 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad 8 = 2 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu$$

$$(2) \quad -74 = 4 \cdot \lambda + 34 \cdot \mu$$

$$(3) \quad -2 = -5 \cdot \lambda - 11 \cdot \mu$$

$$(1) \quad 2 \cdot \lambda = 8 - 2 \cdot \mu$$

$$\lambda = 4 - \mu$$

$$(2) \quad -74 = 4 \cdot (4 - \mu) + 34 \cdot \mu$$

$$-74 = 16 - 4 \cdot \mu + 34 \cdot \mu$$

$$-90 = 30 \cdot \mu$$

$$\mu = -3$$

$$(1) \quad \lambda = 4 + 3$$

$$\lambda = 7$$

$$(3) \quad -2 = -5 \cdot 7 - 11 \cdot (-3)$$

$$-2 = -35 + 33$$

$$-2 = -2 \quad (\text{wahre Aussage})$$

Antwort: $\vec{c} = 7 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$

2. Untersuchen Sie, ob sich $\vec{c} = \begin{pmatrix} 21 \\ -23 \\ 99 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ darstellen lässt.

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 21 \\ -23 \\ 99 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- (1) $21 = 2 \cdot \lambda - \mu$
- (2) $-23 = -\lambda + 3 \cdot \mu$
- (3) $99 = 19 \cdot \lambda + 6 \cdot \mu$
- (1) $\mu = 2 \cdot \lambda - 21$
- (2) $-23 = -\lambda + 3 \cdot \lambda - 63$
 $40 = 5 \cdot \lambda$
 $\lambda = 8$
- (1) $\mu = 2 \cdot 8 - 21$
 $\mu = -5$
- (3) $99 = 19 \cdot 8 + 6 \cdot (-5)$
 $99 = 122$ (falsche Aussage)
 $-2 = -35 + 33$
 $-2 = -2$ (wahre Aussage)

Antwort: $\vec{c} = \begin{pmatrix} 21 \\ -23 \\ 99 \end{pmatrix}$ lässt sich nicht als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ darstellen.

3. Untersuchen Sie, ob sich $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ darstellen lässt.}$$

Antwort: $\vec{z} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$

4. Untersuchen Sie, ob sich $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ darstellen lässt.

3.2 Kollinearität zweier Vektoren

3.2.1 Aufgabe

Es ist zu untersuchen, ob sich $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4,5 \\ -15 \end{pmatrix}$ darstellen lässt.

$$\vec{b} = \sigma \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4,5 \\ -15 \end{pmatrix} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad -3 = 2 \cdot \sigma$$

$$\sigma = -\frac{3}{2}$$

$$(2) \quad 4,5 = -\frac{3}{2} \cdot (-3)$$

$$4,5 = 4,5 \quad (\text{wahre Aussage})$$

$$(3) \quad -15 = -\frac{3}{2} \cdot 10$$

$$-15 = -15 \quad (\text{wahre Aussage})$$

$$\vec{b} = -\frac{3}{2} \cdot \vec{a}$$

Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind parallel. Parallele Vektoren bezeichnet man auch als kollinear oder linear abhängig.

Folgerung:

$$\vec{b} = -\frac{3}{2} \cdot \vec{a}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot \vec{b} = -3 \cdot \vec{a} \\ 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} = \vec{0} \\ 6 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b} = \vec{0} \\ \text{usw.} \end{array} \right\} \quad \text{nicht-triviale Nullsummen}$$

Aber auch:

$$0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0} \quad \text{triviale Nullsumme}$$

3.2.2 Definition der linearen Unabhängigkeit zweier Vektoren

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \vec{0}$ nur für $\lambda = \mu = 0$ erfüllt ist. Anderenfalls nennt man die beiden Vektoren linear abhängig, kollinear oder parallel.

3.2.3 Übung 1

Es ist die Kollinearität der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ -35 \\ 20 \end{pmatrix}$ zu untersuchen.

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -35 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad 12\lambda + 30\mu = 0$$

$$(2) \quad -14\lambda - 35\mu = 0$$

$$(3) \quad 8\lambda + 20\mu = 0$$

$$20\mu = -8\lambda$$

$$\mu = -0,4\lambda$$

$$(1) \quad 12\lambda - 12\lambda = 0$$

$$0 \cdot \lambda = 0 \quad (\text{wahre Aussage})$$

$$(2) \quad -14\lambda + 14\lambda = 0$$

$$0 \cdot \lambda = 0 \quad (\text{wahre Aussage})$$

λ ist beliebig, also insbesondere $\lambda \neq 0$ wählbar. Somit sind \vec{a} und \vec{b} kollinear, also linear abhängig.

3.2.4 Übung 2

Es ist die Kollinearität der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4,5 \\ 20 \end{pmatrix}$ zu untersuchen.

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4,5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad 2\lambda - 3\mu = 0$$

$$(2) \quad -3\lambda + 4,5\mu = 0$$

$$(3) \quad 10\lambda + 20\mu = 0$$

$$10\lambda = -20\mu$$

$$\lambda = -2\mu$$

$$(1) \quad -4\mu - 3\mu = 0$$

$$-7 \cdot \mu = 0$$

$$\mu = 0$$

$$(3) \quad \lambda = -2 \cdot 0$$

$$\lambda = 0$$

$$(2) \quad -3 \cdot 0 + 4,5 \cdot 0 = 0 \quad (\text{wahre Aussage})$$

Es gibt keine nicht-triviale Nullsumme. Somit sind \vec{a} und \vec{b} nicht kollinear, also linear unabhängig.

3.3 Komplanarität dreier Vektoren

3.3.1 Aufgabe

Es ist zu untersuchen, ob sich $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -11 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$ und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ darstellen lässt.

$$\vec{c} = \sigma \cdot \vec{a} + \tau \cdot \vec{b}$$

$$\vec{c} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$$

Damit liegen die drei Vektoren in einer Ebene. Solche drei Vektoren bezeichnet man auch als komplanar oder linear abhängig.

Folgerung:

$$\vec{c} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$$

$$\left. \begin{array}{l} 6 \cdot \vec{c} = 2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} \\ 2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} - 6 \cdot \vec{c} = \vec{0} \\ 8 \cdot \vec{a} - 12 \cdot \vec{b} - 24 \cdot \vec{c} = \vec{0} \\ \text{usw.} \end{array} \right\} \quad \text{nicht-triviale Nullsummen}$$

Aber auch:

$$0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad \text{triviale Nullsumme}$$

3.3.2 Definition

Drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{0}$ nur für $\lambda = \mu = \nu = 0$ erfüllt ist. Anderenfalls nennt man die drei in einer Ebene liegenden Vektoren linear abhängig oder komplanar.

3.3.3 Übung 1

Es ist die Komplanarität der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -11 \end{pmatrix}$ zu untersuchen.

3.3.4 Übung 2

Es ist die Komplanarität der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix}$ zu untersuchen.

Es gibt keine nichttriviale Nullsumme.

Aber es gilt: $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$ (triviale Nullsumme)

3.4 Verallgemeinerte Definition der linearen Unabhängigkeit

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung

$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ erfüllt ist. Anderenfalls nennt man die Vektoren linear abhängig.

3.5 Aufgaben und Übungen

3.5.1 Aufgabe 1

Die gegebenen Vektoren sind auf lineare Abhängigkeit zu untersuchen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad -2\lambda - 5\mu + \nu = 0$$

$$(2) \quad \lambda + 4\mu - 2\nu = 0$$

$$(3) \quad 3\lambda + \mu + 5\nu = 0$$

$$(1) \quad \nu = 2\lambda + 5\mu$$

$$(2) \quad \lambda + 4\mu - 2 \cdot (2\lambda + 5\mu) = 0$$

$$\lambda + 4\mu - 4\lambda - 10\mu = 0$$

$$-3\lambda - 6\mu = 0$$

$$-3\lambda = 6\mu$$

$$\lambda = -2\mu$$

$$(1) \quad \nu = 2 \cdot (-2\mu) + 5\mu$$

$$\nu = -4\mu + 5\mu$$

$$\nu = \mu$$

$$(3) \quad 3 \cdot (-2\mu) + \mu + 5\mu = 0$$

$$-6\mu + \mu + 5\mu = 0$$

$$0 \cdot \mu = 0$$

$$\mu \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

Die Vektoren sind linear abhängig und damit komplanar.

3.5.2 Aufgabe 2

Die gegebenen Vektoren sind auf lineare Abhängigkeit zu untersuchen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \lambda + 2\mu + 4\nu = 0$$

$$(2) \quad -3\lambda - \mu + 3\nu = 0$$

$$(3) \quad 2\lambda + \mu - \nu = 0$$

$$\nu = 2\lambda + \mu$$

$$(1) \quad \lambda + 2\mu + 4 \cdot (2\lambda + \mu) = 0$$

$$\lambda + 2\mu + 8\lambda + 4\mu = 0$$

$$9\lambda + 6\mu = 0$$

$$6\mu = -9\lambda$$

$$\mu = -\frac{3}{2}\lambda$$

$$(3) \quad \nu = 2\lambda - \frac{3}{2}\lambda$$

$$\nu = \frac{1}{2}\lambda$$

$$(2) \quad -3\lambda + \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\lambda = 0$$

$$0 \cdot \lambda = 0$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

Die Vektoren sind linear abhängig und damit komplanar.

3.5.3 Aufgabe 3

Die gegebenen Vektoren sind auf lineare Abhängigkeit zu untersuchen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad 4\lambda - 7\mu + 3\nu = 0$$

$$(2) \quad -2\lambda + 5\nu = 0$$

$$(3) \quad 3\lambda + 2\mu - 6\nu = 0$$

$$(2) \quad 2\lambda = 5\nu$$

$$\lambda = \frac{5}{2}\nu$$

$$(1) \quad 4 \cdot \frac{5}{2}\nu - 7\mu + 3\nu = 0$$

$$10\nu - 7\mu + 3\nu = 0$$

$$13\nu - 7\mu = 0$$

$$7\mu = 13\nu$$

$$\mu = \frac{13}{7}\nu$$

$$(3) \quad 3 \cdot \frac{5}{2}\nu + 2 \cdot \frac{13}{7}\nu - 6\nu = 0$$

$$\frac{73}{14}\nu = 0$$

$$\nu = 0$$

$$(1) \quad \mu = 0$$

$$(2) \quad \lambda = 0$$

Die Vektoren sind linear unabhängig.