Berechnung von Flächeninhalten	Thema 1: Flächen unterhalb der x - Achse	

Flächen unterhalb der x-Achse

In den bisherigen Betrachtungen zur Berechnung der Inhalte von Flächen zwischen Graphen von Funktionen und der x-Achse wurde stets davon ausgegangen, dass diese Flächen vollständig „oberhalb" der x-Achse liegen.

Anhand des obigen Beispiels wurde deutlich, dass man auch Inhalte von Flächen ermitteln kann, die „unterhalb" der x-Achse liegen, indem man für das entsprechende Intervall den Betrag des bestimmten Integrals berechnet. Liegen Teile der Fläche oberhalb und andere unterhalb der x-Achse, so müssen die Inhalte der entsprechenden Teilflächen gesondert bestimmt und anschließend addiert werden.

Für Flächen unterhalb der x-Achse gilt:

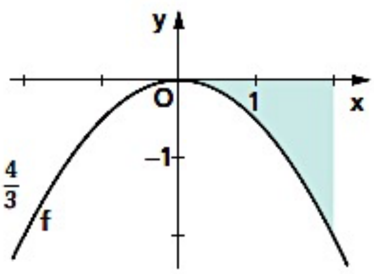
S

Es seien f eine im Intervall [a; b] stetige Funktion und F die zugehörige Stammfunktion. Im Intervall [a; b] gelte für die Funktionswerte $f(x) \le 0$. Dann gilt für den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall [a; b]:

$$A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|[F(x)]_a^b\right| = |F(b) - F(a)|$$

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^2$. Es soll die in der Abbildung markierte Fläche berechnet werden.

Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, rechnen wir mit dem Betrag des bestimmten Integrals.



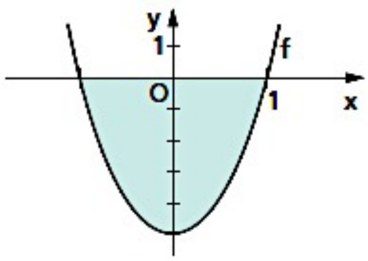
$$A = \left|\int_0^2 \left(-\tfrac{1}{2}x^2\right)dx\right| = \left|\left[-\tfrac{1}{6}x^3\right]_0^2\right| = \left|\left(-\tfrac{1}{6}\cdot 2^3\right) - \left(-\tfrac{1}{6}\cdot 0^3\right)\right| = \left|-\tfrac{8}{6}\right| = \tfrac{4}{3}$$

Der Flächeninhalt beträgt $\frac{4}{3}$ FE.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 + 4x^2 - 5$. Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse vollständig einschließt.

Da diese Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist der Betrag des bestimmten Integrals zu ermitteln.

Die Integrationsgrenzen entsprechen den Nullstellen von f. Mittels GTR oder CAS erhalten wir dafür $x_{0_1} = 1$ und $x_{0_2} = -1$. Für den Flächeninhalt gilt somit:



$$A = \left|\int_{-1}^{1}(x^4 + 4x^2 - 5)\,dx\right| = \left|\left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{4}{3}x^3 - 5x\right]_{-1}^{1}\right|$$

$$= \left|\left(\tfrac{1}{5}\cdot 1^5 + \tfrac{4}{3}\cdot 1^3 - 5\cdot 1\right) - \left(\tfrac{1}{5}(-1)^5 + \tfrac{4}{3}(-1)^3 - 5\cdot(-1)\right)\right| = \left|-\tfrac{104}{15}\right| = \tfrac{104}{15}$$

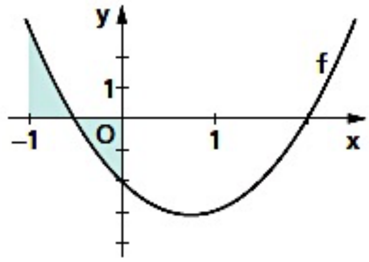
Der Flächeninhalt beträgt $\frac{104}{15}$ FE.

Hinweis: Aufgrund der Achsensymmetrie des Graphen von f bezüglich der y-Achse ließe sich der Flächeninhalt vorteilhaft als $A = A_{-1}^{1} = 2\cdot A_0^1$ berechnen.

Berechnung von Flächeninhalten	Thema 2: Flächen oberhalb und unterhalb der *x* - Achse

Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse

Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ und der x-Achse soll im Intervall $[-1; 0]$ berechnet werden.



Da der Graph von f in $[-1; 0]$ eine Nullstelle hat, befindet sich ein Teil der zu berechnenden Fläche oberhalb, ein anderer Teil unterhalb der x-Achse. Integrieren wir über dem gesamten Intervall $[-1; 0]$, wird von der betragsmäßig größeren Fläche die kleinere abgezogen. Deshalb müssen die Inhalte beider Teilflächen einzeln berechnet und anschließend addiert werden. Die interessierende Nullstelle liegt bei $-\frac{1}{2}$.

$$A = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x - 2)\,dx + \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{0} (2x^2 - 3x - 2)\,dx\right| = \left[\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \left|\left[\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - 2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}\right|$$

$$= \left(\tfrac{2}{3}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 - \tfrac{3}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) - \left(\tfrac{2}{3}(-1)^3 - \tfrac{3}{2}(-1)^2 - 2(-1)\right)$$

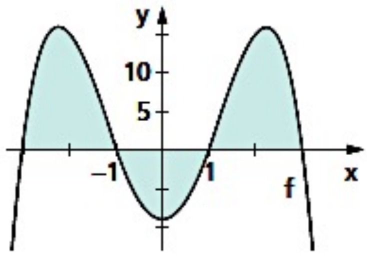
$$+ \left|\left(\tfrac{2}{3}(-1)^3 - \tfrac{3}{2}(-1)^2 - 2(-1)\right) - \left(\tfrac{2}{3}\cdot 0^3 - \tfrac{3}{2}\cdot 0^2 - 2\cdot 0\right)\right| = \frac{17}{24} + \left|\frac{-13}{24}\right| = \frac{5}{4}$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt $\frac{5}{4}$ FE.

Hinweis: Da das bestimmte Integral für Flächen oberhalb der x-Achse stets positiv ist, können die Betragsstriche bei der Berechnung dieser Teilflächen weggelassen werden.

Das am vorigen Beispiel demonstrierte Vorgehen wendet man auch an, wenn der Graph der Funktion im betrachteten Intervall mehrere Nullstellen besitzt.

Es soll der Inhalt der Fläche berechnet werden, die der Graph der Funktion f mit $f(x) = -x^4 + 10x^2 - 9$ und die x-Achse vollständig einschließen.



Wir erkennen, dass auch hier Teile der Fläche oberhalb und andere Teile unterhalb der x-Achse liegen, weshalb die Inhalte der Teilflächen einzeln berechnet und addiert werden müssen.

Zur Ermittlung der Integrationsgrenzen werden die Nullstellen der Funktion rechnerisch oder grafisch bestimmt. Man erhält $x_{0_1} = -3$, $x_{0_2} = -1$, $x_{0_3} = 1$ und $x_{0_4} = 3$.

$$A = \int_{-3}^{-1} (-x^4 + 10x^2 - 9)\,dx + \left|\int_{-1}^{1} (-x^4 + 10x^2 - 9)\,dx\right| + \int_{1}^{3} (-x^4 + 10x^2 - 9)\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{10}{3}x^3 - 9x\right]_{-3}^{-1} + \left|\left[-\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{10}{3}x^3 - 9x\right]_{-1}^{1}\right| + \left[-\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{10}{3}x^3 - 9x\right]_{1}^{3}$$

$$= \frac{304}{15} + \left|-\frac{176}{15}\right| + \frac{304}{15} = \frac{784}{15}$$

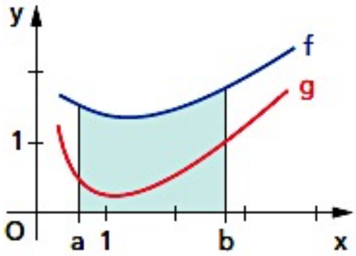
Der Flächeninhalt beträgt rund 52,3 FE.

Hinweis: Auch hier wäre die vorteilhafte Rechnung $A = A_{-3}^{3} = 2 \cdot A_{0}^{3}$ möglich.

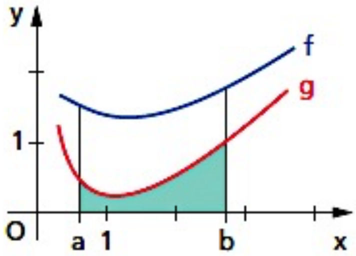
Berechnung von Flächeninhalten	Thema 3: Flächen zwischen Funktionsgraphen	

Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen

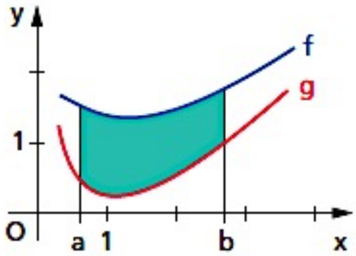
Im zweiten Beispiel auf Seite 74 wurde nach dem Inhalt einer Fläche gefragt, deren obere und untere Begrenzung näherungsweise durch Funktionen beschrieben wurde. Das mathematische Problem besteht jetzt darin, die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen in einem Intervall [a; b] zu ermitteln. Ein solches Problem ist lösbar, indem man von der Fläche, die die „obere“ Randfunktion mit der x-Achse einschließt, die Fläche subtrahiert, die die „untere“ Randfunktion mit der x-Achse einschließt.



$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$



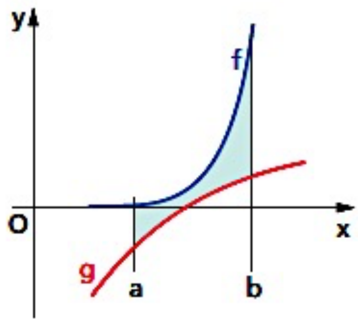
$A_2 = \int_a^b g(x)\,dx$



$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Effektiver ist es jedoch, zunächst die Differenz aus „oberer Randfunktion“ und „unterer Randfunktion“, also $d(x) = f(x) - g(x)$, zu bilden und diese dann über dem Intervall [a; b] zu integrieren:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



Dieses Vorgehen führt auch dann zum Ziel, wenn f oder g im Integrationsintervall [a; b] Nullstellen besitzen.

Hinweis: Das Prüfen, welches obere bzw. untere Randfunktion ist, kann entfallen, wenn mit dem Betrag des Integrals gerechnet wird.

Es seien f und g in [a; b] stetige Funktionen mit $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a; b]$.
Für den Inhalt der Fläche, die durch die Graphen der Funktionen f und g sowie die Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, gilt:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Es soll die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f mit $f(x) = 0{,}5x + 2$ und g mit $g(x) = e^{2x-1}$ im Intervall [–2; 0] berechnet werden.
Da im Intervall $f(x) > g(x)$ gilt, ist f obere und g untere Randfunktion. Es gilt:

$$A = \int_{-2}^{0} (0{,}5x + 2 - e^{2x-1})\,dx = \left[0{,}25x^2 + 2x - \tfrac{1}{2}e^{2x-1}\right]_{-2}^{0}$$

$$= \left(0{,}25 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - \tfrac{1}{2}e^{2\cdot 0 - 1}\right) - \left(0{,}25 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - \tfrac{1}{2}e^{2\cdot(-2)-1}\right) = -\tfrac{1}{2e} - \left(-\tfrac{e^{-5}}{2} - 3\right) \approx 2{,}82$$

Der Flächeninhalt beträgt 2,82 FE.