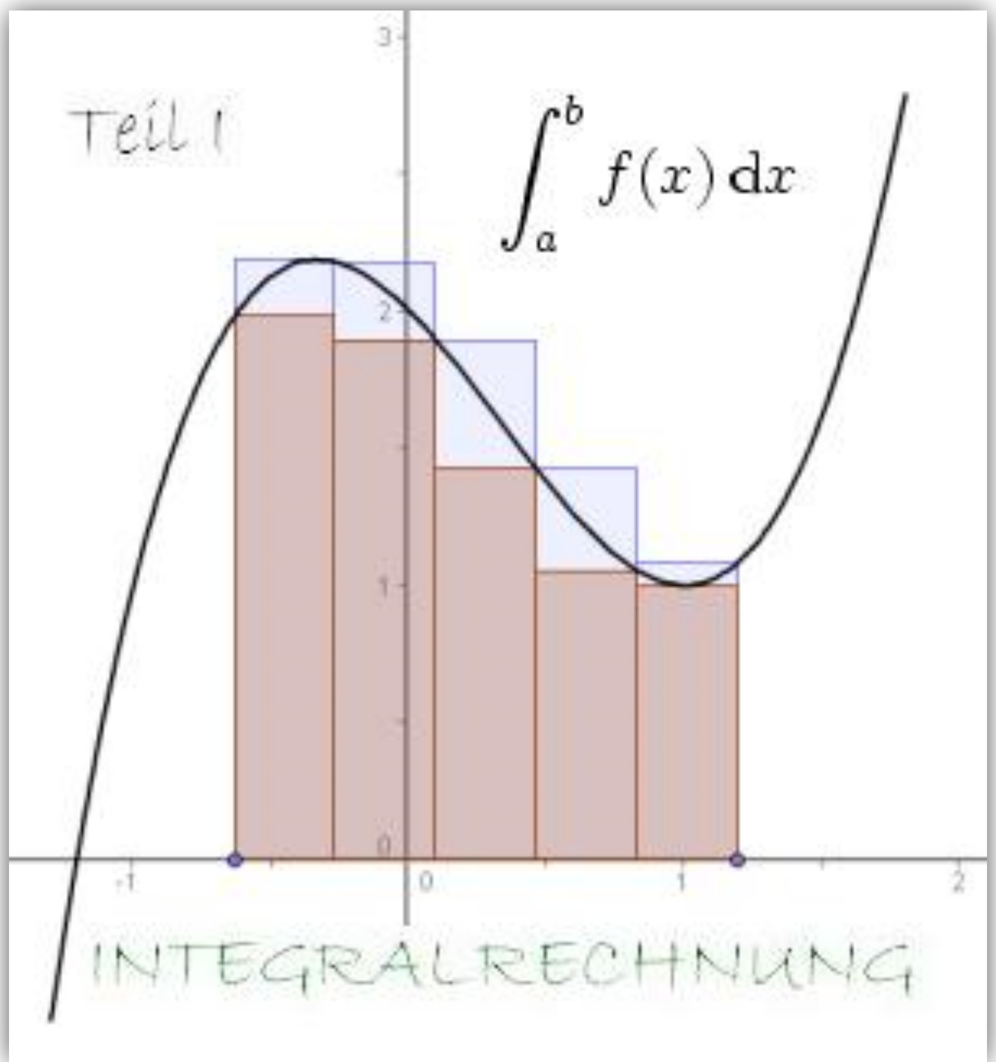
Informationsmaterial

Gruppen 1 – 3

Thema: Berechnung von Flächeninhalten



Informationsmaterial: Berechnung von Flächeninhalten (für Gruppen 1 – 3)

Auf die geometrische Deutung des bestimmten Integrals als Inhalt einer Fläche wurde bereits hingewiesen (s. Definition E 4). Daraus resultiert die erste Anwendung – die Berechnung von Flächeninhalten. Die Vielfalt der möglichen Flächen wollen wir uns systematisch erschließen.

– *Flächen unter Funktionsgraphen, die oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen*

Wir haben bereits festgestellt, dass für eine stetige nichtnegative Funktion f das bestimmte Integral über dem Intervall [a; b] gleich der Maßzahl des Inhalts der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f, der x-Achse sowie den Geraden x = a und x = b (kürzer: zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall [a; b]) ist: $A = \int_a^b f(x)\,dx$.

Beispiel E 23:
Es ist der Inhalt der Fläche zu berechnen, den der Graph der Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 3$, die x-Achse und die Geraden $x = -3$ und $x = 1$ einschließen.

$$A = \int_{-3}^{1} (x^3 + 3x^2 - 2x + 3)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + 3x\right]_{-3}^{1}$$
$$= \left(\frac{1}{4} + 1 - 1 + 3\right) - \left(\frac{81}{4} - 27 - 9 - 9\right)$$
$$= 3{,}25 - (-24{,}75) = 28$$

Als Maßeinheit führen wir Flächeneinheiten (FE) ein (A steht hier und im Folgenden also immer nur für die Maßzahl des Flächeninhalts).
Der gesuchte Flächeninhalt beträgt 28 FE.

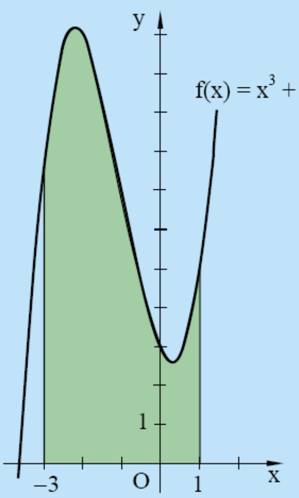


Fig. E 30

Wir wollen nun die Frage klären, wie der Flächeninhalt berechnet werden kann, wenn die Funktion f im Intervall [a; b] nichtpositiv ist, d.h., wenn die zu berechnende Fläche unterhalb der x-Achse liegt.
Also: Es sei f eine stetige nichtpositive Funktion im Intervall [a; b] (s. Fig. E 31). Der Graph dieser Funktion begrenzt ebenfalls zusammen mit der x-Achse sowie den Geraden x = a und x = b eine Fläche. Bilden wir die Funktion –f, so ist diese im Intervall [a; b] positiv.

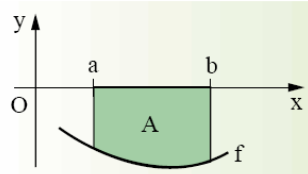


Fig. E 31

Das bestimmte Integral $\int_a^b [-f(x)]\,dx$ stellt dann den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion –f und der x-Achse im Intervall [a; b] dar. Diese Fläche ist flächengleich der in Fig. E 31 dargestellten Fläche – die Flächen liegen symmetrisch zur x-Achse. Nach der Faktorregel für bestimmte Integrale folgt $\int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, d. h., das bestimmte Integral von f und das bestimmte Integral von –f unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Um aber stets positive Maßzahlen für den Flächeninhalt zu erhalten, schreiben wir $A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.

Beispiel E 24:

a) Es ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = (x-3)^2 - 4$ und der x-Achse im Intervall [2; 4] zu berechnen (Fig. E 32).
Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse – wir müssen den Betrag des entsprechenden bestimmten Integrals berechnen.

$$A = \left|\int_2^4 [(x-3)^2 - 4]\,dx\right| = \left|\int_2^4 (x^2 - 6x + 5)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_2^4\right|$$

$$= \left|\left(\frac{64}{3} - 48 + 20\right) - \left(\frac{8}{3} - 12 + 10\right)\right| = \left|-\frac{22}{3}\right| \approx 7{,}3$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 7,3 FE.

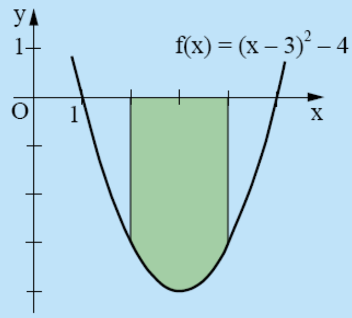


Fig. E 32

b) Es ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 2x$ und der x-Achse in den Grenzen –1 und 1 zu berechnen (Fig. E 33).
Die Funktion f hat im Intervall [–1; 1] eine Nullstelle. Der Graph der Funktion f schneidet in diesem Intervall also die x-Achse – die gesuchte Fläche liegt sowohl unterhalb als auch oberhalb der x-Achse. Aus diesem Grunde wäre es hier falsch, über das gesamte Intervall zu integrieren – man erhielte dann nämlich als Resultat die Summe aus einem „positiven“ und einem „negativen“ Flächeninhalt. Die beiden Teilflächen müssen in einem solchen Fall einzeln berechnet werden.

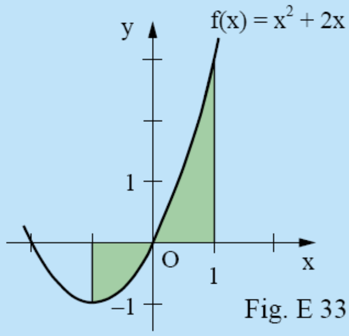


Fig. E 33

$$A = \left|\int_{-1}^0 (x^2 + 2x)\,dx\right| + \int_0^1 (x^2 + 2x)\,dx = \left|\left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^0\right| + \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1$$

$$= \left|-\frac{2}{3}\right| + \frac{4}{3} = 2$$

Der Flächeninhalt beträgt 2 FE.

c) Durch den Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 7x + 10$ und die x-Achse wird eine Fläche vollständig begrenzt. Der Inhalt dieser Fläche ist zu berechnen.

(1) Um die Integrationsgrenzen zu ermitteln, zwischen denen das bestimmte Integral zu berechnen ist, müssen die Nullstellen der Funktion f bestimmt werden.
$f(x) = 0 = x^2 - 7x + 10$
Mittels der Lösungsformel für quadratische Gleichungen (oder in dem vorliegenden einfachen Fall auch nach dem VIETAschen Wurzelsatz) erhalten wir als Nullstellen $x_1 = 5$ und $x_2 = 2$.

(2) Skizze:

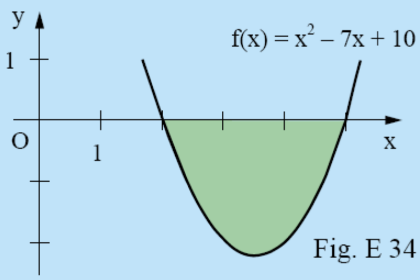


Fig. E 34

(3) Flächenberechnung:

$$A = \left|\int_2^5 (x^2 - 7x + 10)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 10x\right]_2^5\right|$$

$$= \left|\left(\frac{125}{3} - \frac{175}{2} + 50\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{28}{2} + 20\right)\right| = |-4{,}5| = 4{,}5$$

Der Flächeninhalt beträgt 4,5 FE.

d) Es ist der Inhalt der Fläche zu bestimmen, die der Graph der Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ und die x-Achse vollständig begrenzen.
Wir gehen nach derselben Schrittfolge wie in Aufgabenteil c) vor.
(1) Bestimmen der Integrationsgrenzen (Nullstellen):
$f(x) = 0 = x^4 - 5x^2 + 4$
Durch Substitution $x^2 = z$ und Lösen der quadratischen Gleichung erhalten wir $x_{1/2} = \pm 2$ und $x_{3/4} = \pm 1$.

(2) Skizze:

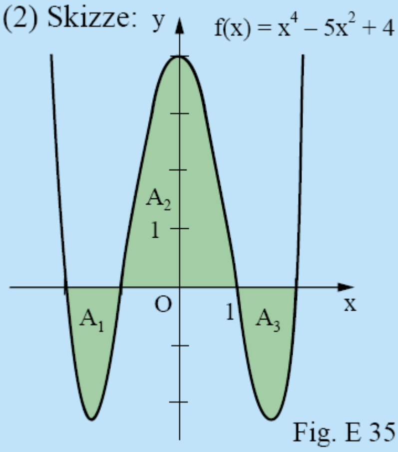


Fig. E 35

(3) Flächenberechnung:
Der Skizze kann man entnehmen, dass sich die Gesamtfläche aus drei Teilflächen zusammensetzt:
$A = A_1 + A_2 + A_3$
Wir berechnen die Teilflächen:

$$A_1 = \left| \int_{-2}^{-1} (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx \right| = \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{-1} \right| \approx |-1{,}47| = 1{,}47$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_{-1}^{1} \approx 5{,}07$$

$A_3 = A_1 \approx 1{,}47$ (wegen Symmetrie)

$A \approx 1{,}47 + 5{,}07 + 1{,}47 = 8{,}01$

Der Flächeninhalt beträgt rund 8 FE.

Die Beispiele zeigen: Bei der Berechnung des Inhalts von Flächen, die von Graphen stetiger Funktionen und der x-Achse vollständig oder in gegebenen Grenzen eingeschlossen werden, sind zunächst die Nullstellen dieser Funktion zu berechnen, um dann entscheiden zu können, welche Lage die Flächen beziehungsweise die Teilflächen bezüglich der x-Achse haben. Liegen Nullstellen im Intervall, so erfolgt ein Lagewechsel der Flächenstücke hinsichtlich der x-Achse und die Gesamtfläche muss „stückweise" berechnet werden.

Beispiel E 25:
Der Graph der Funktion $f(x) = 0{,}5\,(x^3 - 6x^2 + 9x - 1)$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Der Inhalt dieser Fläche ist unter Verwendung eines GTA zu ermitteln.
Zur Berechnung von Flächeninhalten mit dem GTA kann man wie im Beispiel E 24 vorgehen:
(1) Funktion zeichnen
(2) Nullstellen ermitteln
(3) Inhalt der Flächenstücke zwischen je zwei Nullstellen berechnen
(4) Beträge der Flächeninhalte addieren

Fig. E 36 gibt einen mittels der Zero-Funktion ermittelten Näherungswert für die erste Nullstelle an: $x_1 \approx 0{,}1206$. Analog erhält man $x_2 \approx 2{,}3473$ und $x_3 \approx 3{,}5321$. Daraus lassen sich die Inhalte der Teilflächen $A_1 \approx 2{,}114$ (FE) bzw. $A_2 \approx |-0{,}391|$ (FE) und somit $A \approx 2{,}5$ (FE) ermitteln.

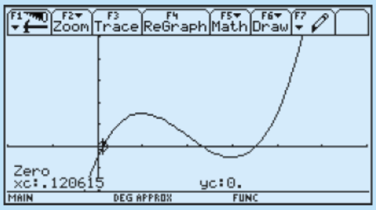


Fig. E 36

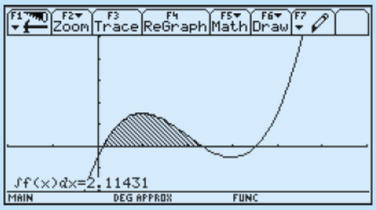


Fig. E 37

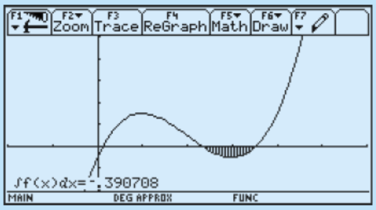


Fig. E 38

Natürlich hätte man auch analog zu Beispiel E 24 d) vorgehen und dazu eingeben können:

$$A \approx \int_{0{,}1206}^{2{,}3473} (0{,}5(x^3 - 6x^2 + 9x - 1))dx + \left|\int_{2{,}3473}^{3{,}5321} (0{,}5(x^3 - 6x^2 + 9\,x - 1))dx\right|$$

– *Flächen, die zwischen zwei Funktionsgraphen liegen*

Beispiel E 26:

Die Graphen der Funktionen $f(x) = (x - 4)^2 + 1$ und $g(x) = -x + 7$ schließen ein Flächenstück ein. Der Inhalt dieser Fläche soll ermittelt werden.

(1) Skizze (Fig. E 41):

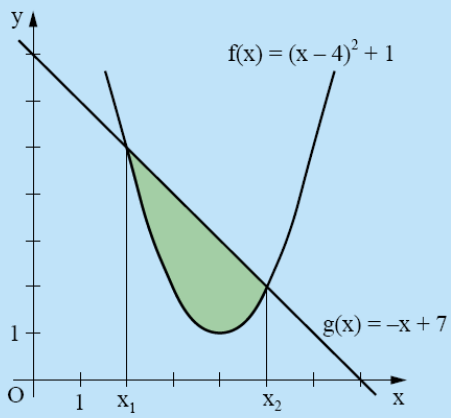


Fig. E 41

(2) Bestimmen der Integrationsgrenzen:

Die Integrationsgrenzen ergeben sich hier aus den Schnittpunkten der Graphen der Funktionen f und g. Die Abszissen der Schnittpunkte sind die Integrationsgrenzen. Wir bestimmen die Abszissen:

$f(x) = g(x)$, also $(x - 4)^2 + 1 = -x + 7$.

Daraus folgt:

$x^2 - 8x + 17 = -x + 7$ bzw. $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Diese Gleichung hat die Lösungen

$x_1 = 2$ und $x_2 = 5$.

(3) Ermitteln des Flächeninhaltes:

Der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f und g ist die Differenz der Inhalte der Flächen unter den Graphen der Funktion g bzw. f. Also:

$$A = \int_2^5 (-x + 7)\,dx - \int_2^5 ((x - 4)^2 + 1)\,dx = \int_2^5 [(-x + 7) - ((x - 4)^2 + 1)]\,dx \quad \text{(nach Satz E 11)}$$

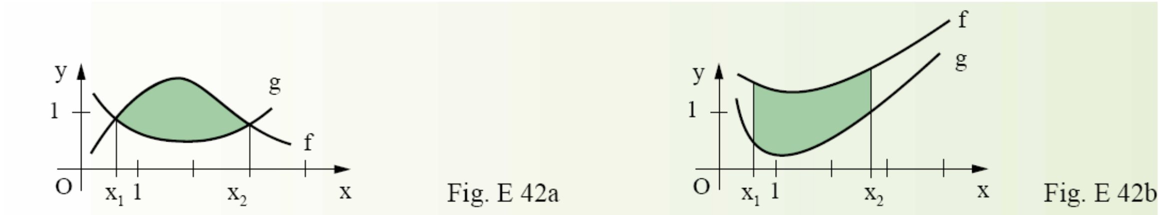
und damit:

$$A = \int_2^5 (-x^2 + 7x - 10)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}x^2 - 10x\right]_2^5 = \frac{9}{2}$$

Die Fläche zwischen den beiden Graphen hat einen Inhalt von 4,5 FE.

Diese Vorgehensweise zur Berechnung des Inhaltes der Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen soll nun verallgemeinert werden:

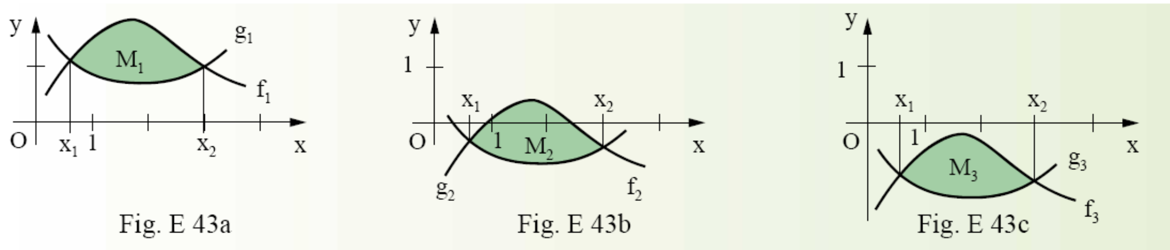
Es seien f und g zwei stetige und im Intervall $[x_1; x_2]$ nichtnegative Funktionen mit $f(x) > g(x)$ für alle x zwischen x_1 und x_2 sowie $f(x_1) \geq g(x_1)$, $f(x_2) \geq g(x_2)$ (s. Fig. E 42a/b).



Dann gilt für die Inhaltsmaßzahl der von den Graphen beider Funktionen im Intervall $[x_1; x_2]$ eingeschlossenen Fläche

$$A = A_1 - A_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,dx.$$

Dieser Weg der Berechnung von Flächenstücken zwischen Funktionsgraphen ist unabhängig von der Lage der Flächenstücke bezüglich der x-Achse, wie sie in den Fig. E 43a – c dargestellt sind.



Liegt die Fläche teilweise oder vollständig unterhalb der x-Achse, kann durch eine Verschiebung in Richtung der y-Achse die Fläche M_2 oder M_3 mit M_1 zur Deckung gebracht werden. Diese Verschiebung lässt die Schnittpunktsabszissen (Integrationsgrenzen) x_1 und x_2 unverändert. Die Gleichungen der Funktionen g_i unterscheiden sich untereinander um denselben konstanten Summanden wie die der entsprechenden Funktionen f_i. Dieser Summand hebt sich dann bei der Differenzbildung im Integranden auf. Deshalb gilt:

$$\int_{x_1}^{x_2} [f_1(x) - g_1(x)]\,dx = \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x) - g_2(x)]\,dx = \int_{x_1}^{x_2} [f_3(x) - g_3(x)]\,dx$$

Auf die o. g. Voraussetzung bezüglich der Größe der Funktionswerte von f und g bzw. der gegenseitigen Lage ihrer Graphen kann man verzichten, wenn mit dem Betrag des Differenzintegrals gearbeitet wird: $A = \left| \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,dx \right|$

Beispiel E 27:
Es ist der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der nachfolgend angegebenen Funktionen f und g zu berechnen.

a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 1$ und $g(x) = -(x - 1)^2 + 2$

(1) Integrationsgrenzen (Abszissen der Graphenschnittpunkte):

$f(x) = g(x)$, also $0{,}5x^2 - 1 = -(x - 1)^2 + 2$

Daraus folgt $x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 0$ mit $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

(2) Skizze:

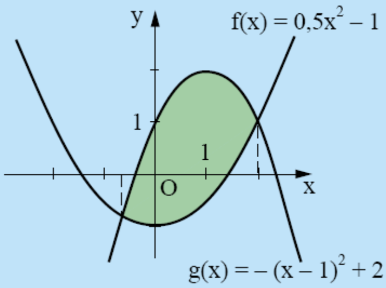


Fig. E 44

(3) Flächeninhalt:

$$A = \left| \int_{-\frac{2}{3}}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-\frac{2}{3}}^{2} [0{,}5x^2 - 1 - (-(x-1)^2 + 2)]\,dx \right|$$

$$= \left| \int_{-\frac{2}{3}}^{2} (\tfrac{3}{2}x^2 - 2x - 2)\,dx \right| = \left| [\tfrac{1}{2}x^3 - x^2 - 2x]_{-\frac{2}{3}}^{2} \right|$$

$$= |(4 - 4 - 4) - (-\tfrac{4}{27} - \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{3})| = \tfrac{128}{27}$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 4,74 FE.

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$

(1) Integrationsgrenzen:

$f(x) = g(x)$, also $\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$

Daraus folgt $x^3 - x^2 - 6x = 0 = x(x^2 - x - 6) = 0$,

also $x_1 = 0$ oder $x^2 - x - 6 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$ hat die Lösungen $x_2 = -2$ und $x_3 = 3$.

Wir sehen also: Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in mehreren Punkten. Es entstehen zwischen den Graphen mehrere Teilflächen, die einzeln zu berechnen sind.

(2) Skizze:

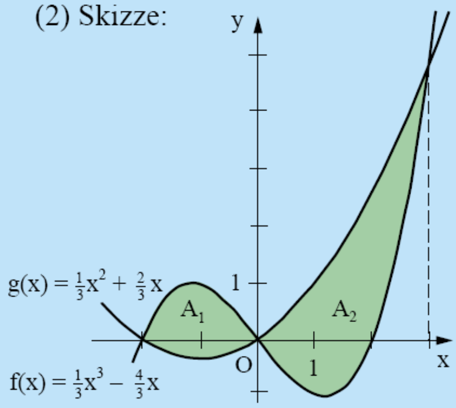


Fig. E 45

(3) Flächeninhalt:

$$A = A_1 + A_2,\ \text{also } A = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \left| \int_{0}^{3} [f(x) - g(x)]\,dx \right|$$

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x - \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{3}x)\,dx \qquad A_2 = \left| \int_{0}^{3} (\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x - \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{3}x)\,dx \right|$$

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 - 2x)\,dx \qquad A_2 = \left| \int_{0}^{3} (\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 - 2x)\,dx \right|$$

$$= [\tfrac{1}{12}x^4 - \tfrac{1}{9}x^3 - x^2]_{-2}^{0} \qquad = \left| [\tfrac{1}{12}x^4 - \tfrac{1}{9}x^3 - x^2]_{0}^{3} \right|$$

$$= (0 - (\tfrac{16}{12} + \tfrac{8}{9} - 4)) = \tfrac{16}{9} \qquad = \left| (\tfrac{81}{12} - \tfrac{27}{9} - 9) - 0 \right| = \left| -\tfrac{21}{4} \right| = \tfrac{21}{4}$$

$$A = \tfrac{16}{9} + \tfrac{21}{4} = \tfrac{253}{36}$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 7 FE.

c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ und $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

(1) Integrationsgrenzen:

Der GTA gibt als Schnittpunktsabszissen an: $x_1 \approx 0{,}6063$ (Fig. E 46), $x_2 \approx 2{,}062$.

(2) Flächeninhalt:

Der Inhalt der Fläche, die im Grafikbildschirm mittels F5 (*Math*) C (*Shade*) schraffiert wurde (Fig. E 47), beträgt $A \approx 1{,}07$ (FE) (Fig. E 48).

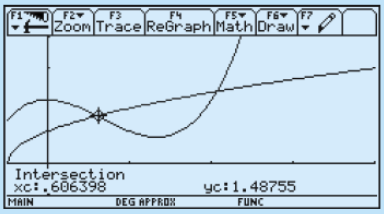


Fig. E 46

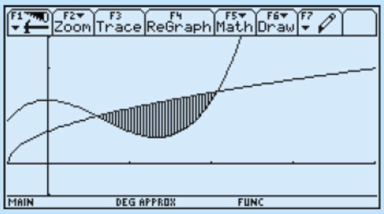


Fig. E 47

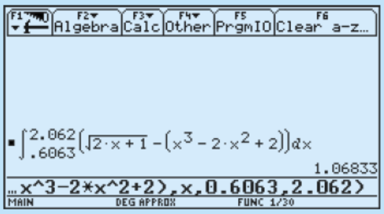


Fig. E 48

Ähnlich wie im Beispiel E 25 kann man auch hier noch einen anderen Berechnungsweg wählen (Fig. E 49):

(1) Funktionen f(x) und g(x) definieren

(2) Schnittpunktsabszissen der Graphen von f und g mit *solve* ( ) ermitteln

(3) Inhalt der eingeschlossenen Fläche berechnen

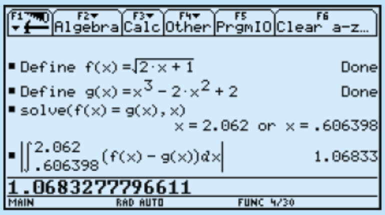


Fig. E 49